Ecole Supérieure de Gestion

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR TECHNIQUE PRIVÉ

CONCOURS D'ENTREE 1986

CONCOURS FORMULES E et T

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I **DUREE : 4 H COEFFICIENT : 3**

VENDREDI 18 AVRIL DE 14 H à 18 H

PROBLEME N° 1 : (12 points)

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels privés de 0.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. Toutes les matrices considérées dans ce problème appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

soient $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a' \\ 0 & 1 & b' \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

PARTIE A :

I 1°)- Calculer : $-D^3 + b'D^2 + a'D$

2°)- Déterminer tous les couples $(a'b') \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad D^{2p+1} = 0$$

II Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A \neq 0$ et $A^3 = 0$.
On considère le sous ensemble E de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices de la forme $\alpha A + \beta A^2 + \gamma I$ avec (α, β, γ) appartenant à $\mathbb{R}^3$

1°)- Montrer que si M appartient à E et que M' appartient à E alors M x M' appartient à E et que M x M' = M' x M

2°) (α, β, γ) appartenant à $\mathbb{R}^3$ démontrer que :
$\alpha A + \beta A^2 + \gamma I = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

3°) Soit C = $I - A^2$ calculer C x $(I + A^2)$
En déduire que C est inversible et que son inverse appartient à E.

4°) a)- Soit B = I-A. Montrer que B est inversible et que son inverse appartient à E.

b)- $p \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $(B^{-1})^p$ est de la forme :
$\alpha_p A + \beta_p A + \gamma_p I$ avec $(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p) \in \mathbb{R}^3$. On déterminera α_p et β_p, en fonction de p.

c)- Montrer que $\sum_{p=1}^{p=n} (B^{-1})^p$ est de la forme $\alpha_n A + \beta_n A^2 + \gamma_n I$ avec $(\alpha_n, \beta_n \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ et on déterminera $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ en fonction de n.

d)- déterminer l'ensemble des matrices A' appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant BxA' = AxB.

5°)

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & a \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & b & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ telle que M' = 0

a) déterminer les nombres a et b.

b) D étant la matrice vérifiant $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad D^{2p+1} = 0$
(α, β, γ) appartenant à $\mathbb{R}^3$ démontrer que :
$\alpha M + \beta D + \gamma I = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

PARTIE B :

1°) Déterminer les couples (a',b') appartenant à $\mathbb{R}^2$ tels que

$p \in \mathbb{N}^*$ $D^{2p+1} = D$

2°) D vérifiant la relation $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $D^{2p+1} = D$.
On considère l'ensemble F des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\alpha D + \beta D^2 + \gamma I$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

a)- (α, β, γ) appartenant à $\mathbb{R}^3$ montrer que :

$$\alpha D + \beta D^2 + \gamma I = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

b)- $p \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $(D + I)^p$ est de la forme :

$\alpha_p D + \beta_p D^2 + \gamma_p I$ avec $(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p)$ appartenant à $\mathbb{R}^3$.

On exprimera α_p et β_p en fonction de p

c)- Montrer que : $\sum_{p=1}^{p=n} (D+I)^p$ est de la forme :

$\alpha_n D + \beta_n D^2 + \gamma_n I$ avec $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ on exprimera $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ en fonction de n

****

PROBLEME N° II (8 points)

Dans ce problème a, b, et n sont trois entiers naturels tels que $0 < b < n < a$.

On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires. Les boules blanches sont numérotées de 1 à a et les boules noires de a + 1 à a + b.

On tire de cette urne n boules simultanément et on suppose l'équiprobabilité des tirages.
On désigne pour $i \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq i \leq a$ X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule numérotée i est dans le tirage des n boules et qui prend la valeur 0 sinon.

1°) Quelle est la loi de la variable X_i ; et calculer son espérance.

2°) a)- Déterminer la loi du couple $(X_i\ X_j)$ que l'on présentera sous forme de tableau
b)- En déduire la covariance du couple $(X_i\ X_j)$
c)- Les variables X_i et X_j sont elles indépendantes ?

3°) Déterminer la loi de la probabilité de la variable $X_1 + X_2$ et calculer la variance de $X_1 + X_2$

4°) Déterminer la loi suivie par la variable $X_1 \times X_2$

5°) Soit X la variable aléatoire égale en nombre de boules blanches tirées :
a)- Quelles sont les valeurs prises par X
b)- Quelle relation a t'on entre :

X et $X_1 + X_2 + \dots + X_a$

c)- Déterminer l'espérance de X en utilisant la relation précédente.
d)- On suppose n = 90 b = 50 et a = 950.
Par quelle loi de probabilité peut-on approximer la loi suivie par X ?

6°) On procède maintenant de la manière suivante :
Si X = k, on remet alors les n boules tirées dans l'urne ainsi que k autres boules blanches et l'on tire a nouveau de cette urne simultanément n boules.

On désigne par Y le nombre de boules blanches a nouveau tirées.

Quelle est la loi du couple (X,Y)

****